Führer, Lutz

Frankfurt am Main

Vom Falschen Ansatz zur Differentialrechnung –
Probieren als fundamentale Idee

(Vortrag auf der GDM-Tagung in München, März 1998)

Kurzfassung:

Probieren geht über Studieren. Wer kompliziertere Textaufgaben oder Gleichungen auflösen möchte und nicht weiß, wie das algorithmisch geht, der wird probieren. Schon in den ältesten Zeiten der Mathematikgeschichte hat man sich bemüht, das nicht blind, sondern systematisch zu tun. Mittel der Wahl war für Jahrtausende die numerische Methode des einfachen oder doppelt „Falschen Ansatzes". Im Vortrag soll ein genetischer Weg von dieser frühen Numerik in die Differentialrechnung rekonstruiert werden. Ein solcher Weg bietet drei Vorzüge: Mittelstufenstoff wird im Kontext wiederholt, der Linearisierungsaspekt der Ableitung erscheint als organisch sinnvoll, und es wird der sprunghafte Fortschritt ein wenig verständlicher, der in der Mathematik nach 1600 durch Buchstabenrechnung, Funktionsbegriff und Analytische Geometrie erreicht wurde.

Lutz Führer, Frankfurt am Main

Vom Falschen Ansatz zur Differentialrechnung – Probieren als fundamentale Idee

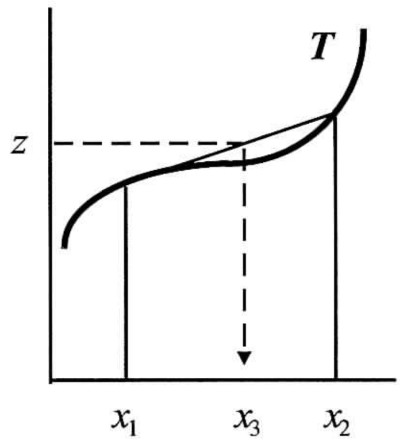
Bekanntlich waren die Lehrbücher der Rechenmeister in der Hauptsache dem schriftlichen „Bürgerlichen Rechnen" gewidmet, das in der Regeldetri für das Umrechnen von Proportionen gipfelte. Am oberen Rand dieses Standardprogramms gab es seit altersher immer auch gekünstelte, schwach eingekleidete Aufgaben, an denen gewisse Probiertechniken, die sog. „Falschen Ansätze", geübt werden sollten. In der algebraisch-analytischen Sicht heutiger Lehrbücher zur Numerik erscheinen diese Techniken lediglich als triviale Varianten der linearen Interpolation:

Mittels eines Textes T wird umschrieben, wie aus einer Unbekannten x ein Funktionswert T(x) zu berechnen ist. Nun soll x so bestimmt werden, daß sich ein gegebener Zielwert z ergibt.

Kurz: $T(x) \overset{!}{=} z\,,\ x = ?$

Methode des doppelt Falschen Ansatzes (Regula falsi, Sekantenverf.):

rate x_1, x_2 *und bestimme* x_3
mithilfe der zugehörigen Sekante, d.h.,
berechne die Ergebnisfehler $f_i := T(x_i) - z$,
und probiere es mit $x_3 := \frac{f_2}{s} \cdot x_1 - \frac{f_1}{s} \cdot x_2$,
wobei $s := T(x_2) - T(x_1)$.
Notfalls wiederhole das Verfahren mit x_2, x_3 *anstelle von* x_1, x_2.



Dieser modernen Fassung ist freilich nicht mehr anzusehen, warum die Methoden der Falschen Ansätze bis ins Barockzeitalter zum Standardrepertoire aller geschickteren Rechner gehörten und warum sie der heutigen Schulmathematik etwas bringen könnten. Tatsächlich klärt die heute übliche professionelle Sichtweise durch die Brille von Algebra, Analytischer Geometrie und Funktionsbegriff nicht nur auf, sie verstellt oft auch den Blick auf naivere, ursprünglichere Ideen hoher Qualität und Reichweite. Ich bin inzwischen überzeugt, daß die Methode der Falschen Ansätze sowohl historisch als auch fachlich eine höchst fruchtbare Denkweise der Mathematik repräsentiert, die überdies den wichtigsten Grundgedanken aller angewandten Mathematik hervorragend pointiert: Rechne durchsichtig und kontrolliere den Fehler scharf!

Um das zu sehen, empfiehlt es sich, die moderne Fixierung auf Aufgabenstrukturen vorübergehend zu vergessen und Textaufgaben wie „schwächere" Schüler als eigenständige Rätsel ernstzunehmen. Historische Beispiele verfremden den mathematischen Kontext, daher lassen sich die Grundideen in diesem Gewand auch „guten" Schülern leicht vermitteln:

> *Ein Haufen und sein Siebentel zusammen genommen ergeben* 19.
> *(Papyrus Rhind, Aufgabe* 24*)*

Gute Bruchrechner können so etwas im Kopf: Wenn acht Siebentel des Gedachten gleich 19 *sind, dann ist ein Siebentel davon gleich* $\frac{19}{8}$, *und das ursprünglich gedachte Ganze gleich* $7 \cdot \frac{19}{8}$ *bzw. gleich* $\frac{133}{8}$. *Nun sind gute Bruchrechner selten, häufiger trifft man gemeine Buchstabenrechner:* $x + \frac{1}{7}x = 19$, d. h. $\frac{8}{7}x = 19$ bzw. $x = \frac{7}{8} \cdot 19$. *Pfiffiger war ein Rechner um 2000 v.Chr., von dem der Schreiber-Lehrling Ahmes (A'h-mose) dreihundert Jahre später (sinngemäß) abschrieb:*

1. *Rate* 7*! (Warum?)*
2. *Mache die Probe! Du erhältst* 8.
3. *Wie oft steckt die* 8 *in der* 19*? Antwort:* 19/8.
4. *Korrigiere die* 7 *entsprechend auf* $7 \cdot \frac{19}{8}$, *und mache die Probe.*

Wie gut diese „Methode des *einfachen* Falschen Ansatzes" mit einer bequemen Testzahl für das Kopfrechnen ist, wird im Papyrus Rhind anschließend an einer ganzen Serie ähnlicher Aufgaben gezeigt, z.B. – in heutiger Kurzschreibweise:

$$x + \tfrac{1}{2}x = 16,\quad x + \tfrac{1}{4}x = 15,\quad x + \tfrac{1}{5}x = 21,$$
$$x + \tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{7}x = 33,\quad x + \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{4}x = 2,$$
$$x + \tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{7}x = 37,\quad x + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}x = 10.$$

Selbst in moderner Buchstabenform zeigt sich der Vorteil. Noch deutlicher wird er, wenn man auf die Übersetzung in Buchstabenterme verzichtet:

„Ich habe einen Stein gefunden, aber ich habe ihn nicht gewogen; dann habe ich ein Siebentel hinzugefügt und vom neuen Klumpen noch ein Elftel. Ich habe alles zusammen gewogen: eine Mine. Welches war das ursprüngliche Gewicht des Steins? Das Gewicht des Steins war 2/3 Minen 8 *Schekel und* $22\frac{1}{2}$ *Korn." (Altbabylonisch; zur Kontrolle muß man wissen, daß* 60 *Schekel einer Mine entsprachen, und* 180 *Korn einem Schekel.)*

Auf einer ebenfalls altbabylonischen Keilschrifttafel wird nach einem rechtwinkligen Dreieck gefragt, bei dem die Hypotenuse 40 *Ellen lang ist und die eine Kathete ¾ der anderen mißt. Der Rechner beginnt mit der (falschen) Annahme, die größere Kathete sei* 60 *Ellen lang, und berechnet daraus die andere Kathete und die Hypothenuse. Wie kam er wohl von dort zur Lösung?*

„Ein Quadrat und ein zweites, dessen Seite ¾ von der Seite des ersten Quadrates ist, haben zusammen den Flächeninhalt 100. *Laß mich wissen! Nimm ein Quadrat mit Seite* 1, *und nimm ¾ von* 1, *das ist ½ + ¼ als Seite der anderen Fläche. Multipliziere ½ + ¼ mit sich selbst, das ergibt* $\frac{1}{2}+\frac{1}{16}$... *(Nun) addiere man die beiden Flächen. Ergebnis:* $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}$. *Ziehe daraus die Wurzel, das ist* 1 + ¼. *Zieh die Wurzel aus der gegebenen Zahl* 100, *das ist* 10. *Wie oft geht* 1+ ¼ *in* 10? *Es geht achtmal."... (Rest unleserlich; n. van der Waerden EW, S. 46)*

Jedes bessere Rechenbuch der Renaissancezeit enthielt ganze Serien weiterer Beispiele, auch aus der Unterhaltungsmathematik. Natürlich klappt das Ganze nur, wenn die in der Aufgabenstellung verborgene Funktion homogen-linear ist. Ein schönes Gegenbeispiel stammt aus den chinesischen „Neun Büchern arithmetischer Technik" (ca. 1. Jh. v. Chr.):

„Jetzt hat man eine Wand, 5 Fuß dick. Zwei Ratten graben sich gegeneinander (durch die Wand; dabei macht) die große Ratte am (ersten) Tag 1 Fuß; die kleine Ratte (macht) ebenfalls am ersten Tag 1 Fuß. Die große Ratte (macht jetzt an jedem) Tag das Doppelte, die kleine Ratte (an jedem) Tag die Hälfte (der Leistung vom Vortag). Frage: An wieviel Tagen treffen sie sich, (und) wieviel hat jede gegraben? Die Antwort sagt: Es sind $2\frac{2}{17}$ *Tage..."*

Rät man 2 *Tage, dann erhält man einen Fehlbetrag von* 5 *Zoll, bei* 3 *Tagen einen Überschuß von* 3 *Fuß* 7½ *Zoll. Der einfache falsche An-*

satz führt beidemal nicht zum Ziel, wie die Proben zeigen. Was kann man tun? Die beiden Ergebnisfehler von f_1 = -2 bzw. f_2 = +15 Viertelfüßen legen es nahe: Man bilde die „über Kreuz gewichtete" Linearkombination aus den beiden Startwerten $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$. Das liefert in der Tat den verbesserten Wert $x_3 := x_1 + \varepsilon := x_1 - f_1/Sekantensteigung = 2 + 2/17$.

Das ist im wesentlichen die sog. „Methode des *doppelten* falschen Ansatzes", die ich anfangs in der älteren Form des „über Kreuz gewichteten Mittels" beschrieben habe. (Beim einfachen Falschen Ansatz ist x_2 immer gleich Null.) Das chinesische Beispiel legt wegen der großen Fehlerasymmetrie nahe, x_1 durch Addition einer Korrektur $\varepsilon := -f_1/Sekantensteigung$ zu modifizieren, die mit Hilfe von x_2 entsteht. Theoretisch ist das vollkommen äquivalent zur „Regel über Kreuz"; bei wiederholter Anwendung (Iteration), die Cardano 1545 erstmals für höhere Gleichungen vorschlug, vermeidet die Korrekturform allerdings Subtraktionskatastrophen. Und sie ändert die Perspektive erheblich: In der Nähe der richtigen Lösung ist ε klein. Macht es dann noch viel aus? Alles kommt darauf an, wie das ε in die Proberechnung eingeht! Dies ist der algebraische Kern der ersten Differentialrechnung bei Fermat, bei der Taylorentwicklung und am Beginn der Numerik in Eulers „Algebra". Unsere Iteration $x_{neu} := x_{alt} - f_1/Sekantensteigung$ zeigt überdies noch etwas anderes: Approximiert man die Sekanten- durch die Tangentensteigung, so steht schon das Newton-Raphson-Verfahren da...

Damit ist ein numerischer Weg zur intelligenten Analyse von $T(x+\varepsilon)$ aufgezeigt. Wahrscheinlich kommt er den Grundideen recht nahe, die sowohl hinter Fermats „Methode der Maxima und Minima" von 1629 standen als auch hinter vielen späteren Entdeckungen des (Reihen-!) Calculus. Ob mit dieser genetischen Rekonstruktion die historische Wahrheit gestreift wird, ist mir allerdings weniger wichtig als die Vermutung, daß „geschicktes Probieren" mit falschen Ansätzen anwendungsfreundliche Grundauffassungen fördert, die die schulische Einführung in die Differentialrechnung nicht von vornherein doppelt belasten, nämlich mit dem schwierigen Wechselspiel von Zeichnung und Rechnung einerseits *und* mit dem ungewohnten Abschätzen von Fehlern andererseits. Bei Fermat jedenfalls kam letzteres zuerst, und die Rechnung mit E (statt ε) vor der Zeichnung (Anal. Geom. um 1636; Descartes 1637), wenn auch das äußerst fruchtbare Wechselspiel bereits 1629 zwischen den Zeilen zu ahnen ist. Fermat betrachtete $f(x)$ in der Nähe einer Extremstelle als (i.w. lokal) konstant (Kepler 1615). Was noch fehlte war, ε gleiten zu lassen – ein „riesenkleiner" Schritt nach Cardanos Iterationen...

(Weitere Beispiele, Einzelheiten und Quellenangaben stehen in meinem Aufsatz „Geschicktes Probieren", der in einem neuen Geschichtsheft der Zeitschrift „Mathematik lehren" voraussichtlich 1998 erscheinen wird.)